512.33
H81s

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
33
512.892
H81s
MATHEMATICS
DEPARTMENT

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

OCT 9 1973

DEC 31 REC'D

L161—O-1096

SUR LE

CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES,

MÉTHODE D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE

DE

M. BELLAVITIS;

PAR M. J. HOÜEL,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1869

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

SUR LE

CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES.

Depuis les immenses progrès qu'elle a fait faire à l'Analyse par les travaux de Cauchy et de Riemann, la théorie géométrique des quantités complexes a pris rang dans la science classique. Mais on ne s'est pas encore assez occupé des services que peut rendre cette théorie à la Géométrie pure et à la Mécanique, lorsqu'on y considère les grandeurs géométriques pour elles-mêmes, et non plus comme un système particulier de notations remplaçant les notations ordinaires de l'Algèbre.

Cependant tout lecteur attentif des pages qui vont suivre restera convaincu des avantages de cette méthode comme procédé d'Analyse géométrique, et ne pourra que s'étonner de l'indifférence avec laquelle a été accueillie jusqu'à ce jour la belle découverte de M. Giusto Bellavitis. Ce n'est pas que de nombreux travaux n'aient été faits dans la même direction. Mais aucun des auteurs qui ont traité ce sujet n'a présenté la méthode avec autant d'étendue que le savant professeur de Padoue, dont les travaux remontent à l'année 1832; aucun ne l'a exposée sous une forme aussi simple et aussi bien appropriée au sujet. Aussi sommes-nous heureux de l'occasion que nous offre la Rédaction des *Nouvelles Annales*, d'appeler l'attention des Géomètres français sur un instrument d'Analyse qui peut être d'une si grande utilité tant au point de vue de l'enseignement qu'à celui des progrès de la science.

Nous avons cherché à exposer le plus brièvement possible les principes contenus dans les ouvrages que l'Auteur a bien voulu mettre à notre disposition (*), et notre tâche a été grandement facilitée par les précieuses indications qu'il nous a lui-même fournies.

1. Carnot, dans sa *Géométrie de position*, parle des avantages que retirerait la Géométrie de l'introduction d'un algorithme représentant à la fois la grandeur et la position des diverses parties d'une figure, de telle sorte que, sans avoir besoin de recourir à des considérations géométriques spéciales, on pût obtenir les résultats cherchés par l'application d'un calcul fondé sur un petit nombre de lois générales.

Le désir de Carnot est complétement réalisé depuis trente-cinq ans par le *Calcul des équipollences* dû au génie inventif de M. Bellavitis. Bien que cette méthode féconde ne soit pas encore connue dans notre pays, cependant les principes sur lesquels elle repose ont été établis pour la première fois en France, il y a plus de soixante ans, par Argand, et développés ensuite à diverses reprises par les travaux de Français, de Mourey, de Saint-Venant, de Cauchy. Nous pourrions encore citer, parmi les ouvrages relatifs au même sujet, le *Calcul de*

(*) *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica* (*Calcolo delle Equipollenze*); Padova, 1835.

Saggio sull' Algebra degli immaginarii; Venezia, 1852.

Sposizione del metodo delle Equipollenze; Modena, 1854.

Calcolo dei Quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle Equipollenze; Modena, 1858.

Sposizione dei nuovi metodi di Geometria analitica; Venezia, 1860.

Determinazione numerica delle Radici immaginarie delle equazioni algebriche; Venezia, 1864.

Elementi di Geometria, di Trigonometria e di Geometria analitica, ec.; Padova, 1869.

situation de Scheffler (*), le Mémoire de Siebeck sur la *Représentation graphique des fonctions imaginaires* (**), le *Calcul géométrique* de Dillner (***), etc. La théorie des quaternions d'Hamilton (****) repose sur des bases analogues, et peut, jusqu'à un certain point, être regardée comme une extension à l'espace du Calcul des équipollences. Les règles de ce dernier Calcul sont précisément les mêmes que celles du Calcul algébrique, tandis que les quaternions exigent un algorithme spécial.

2. La méthode des équipollences se distingue principalement par les avantages suivants :

1° L'abondance des théorèmes, qui découlent d'un principe unique, toute propriété de points placés en ligne droite donnant immédiatement une propriété des points d'un plan, dès que l'on change les équations relatives aux premiers points en équipollences relatives aux seconds;

2° La facilité avec laquelle on parvient à la solution graphique des problèmes : pour les questions mêmes qui passent pour difficiles, la méthode fournit directement des solutions plus courtes que celles que l'on avait découvertes par des combinaisons artificielles de théorèmes géométriques ;

3° La théorie des courbes, débarrassée de tout système spécial de coordonnées, conduit à des formules plus simples et en même temps plus générales, qui expriment

---

(*) *Der Situationskalkul;* Braunschweig, 1851.

(**) *Journal f. d. r. u. ang. Mathematik*, Bd. LV, 1858.

(***) *Geometrisk Kalkyl;* Upsala, 1860. — L'auteur en fait paraître en ce moment une nouvelle rédaction dans l'excellent journal qu'il dirige (*Tidskrift för Matematik och Fysik;* Upsala).

(****) *Lectures on Quaternions;* Dublin, 1853. — *Elements of Quaternions;* London, 1866.

les affections des courbes, sans qu'il soit besoin de les rapporter à aucun système arbitraire;

4° Elle fournit le type réel des quantités imaginaires, par lequel sont pleinement justifiés les calculs de l'Algèbre, de la manière que Cauchy regardait comme la seule satisfaisante.

3. Pour faire connaître la méthode, il nous faut donner quelques définitions et quelques règles de calcul. Nous croyons inutile de nous arrêter à démontrer la légitimité des premières et la justesse des secondes, parce que, le lecteur une fois convaincu de l'utilité de la méthode, il lui sera facile de retrouver par lui-même la démonstration des principes.

4. Définition. — Une droite désignée, comme d'habitude, par deux lettres, est considérée comme prise *à partir du point indiqué par la première lettre jusqu'au point indiqué par la seconde*, et l'on tient compte, non-seulement de sa grandeur, mais aussi de sa direction (*).

D'après cela, KI et IK ne sont pas deux droites *équipollentes*, quoique l'une soit équipollente à l'autre prise avec le signe —, c'est-à-dire que l'on ait KI = — IK.

Deux droites AB, DC sont dites *équipollentes* (et peuvent se remplacer mutuellement) dans le cas seulement où elles sont à la fois *égales*, *parallèles et dirigées dans le même sens*, de sorte que ABCD soit un parallélogramme. C'est ce que l'on exprime en écrivant

$$AB = DC, \quad \text{ou} \quad AB = -CD, \quad \text{ou encore} \quad AB + CD = 0.$$

(*) Pour exprimer qu'une droite est considérée à ce double point de vue, on surmonte quelquefois les deux lettres qui la représentent d'un trait horizontal; cependant, pour simplifier l'écriture, nous supprimerons ce trait, et il n'en pourra résulter aucune équivoque, en ayant soin d'employer la notation *gr* AB pour désigner la longueur de la ligne AB.

Une droite affectée d'un coefficient numérique conserve sa direction et change de longueur proportionnellement à ce coefficient. Ainsi l'équipollence

$$AB = 2DM$$

signifie que AB est parallèle à DM et dirigé dans le même sens, et que la longueur de AB est double de celle de DM. Pareillement, la formule

$$AP = \frac{1}{3} AB$$

veut dire que le point P est situé au tiers de AB (puisque, sans cela, AP ne pourrait pas être parallèle à AB).

5. Définition. — La *somme géométrique* de deux ou de plusieurs droites KI, DM,... s'obtient en menant, par un point quelconque O, une droite OP équipollente à KI; puis, par la seconde extrémité P, une droite PQ équipollente à DM, etc.; la droite OQ sera la somme géométrique des droites KI, DM,....

De quelque autre point que l'on fût parti, et dans quelque autre ordre que l'on eût additionné les droites, on serait toujours arrivé à une somme géométrique équipollente à OQ.

La même chose a lieu, quel que soit le nombre des droites que l'on ajoute entre elles.

6. Règle I. — Pour trois points quelconques A, B, C, on a l'équipollence

$$AB + BC = AC.$$

C'est là une conséquence de la définition que l'on vient de donner de la somme géométrique.

Pour que l'on ne confonde pas une somme de cette

nature avec une somme ordinaire, M. Bellavitis emploie, au lieu du symbole $=$, un symbole particulier, celui par lequel les astronomes désignent le signe de la Balance, voulant peut-être faire allusion à l'analogie de la sommation géométrique avec la composition des forces en Mécanique. Dans le désir d'éviter autant que possible l'introduction de notations nouvelles, nous avons conservé le signe d'égalité ordinaire, pensant que la confusion sera aussi sûrement évitée au moyen de la convention que nous ferons d'affecter une ligne de la caractéristique *gr* (abrégé de *grandeur*) toutes les fois que cette ligne devra être considérée en *grandeur* seulement, abstraction faite de sa direction.

D'après la Règle que nous venons d'énoncer, on peut encore écrire

$$BC = AC - AB.$$

Une droite BC peut ainsi être rapportée à un point quelconque A. On a encore

$$BC = AC + BA, \quad AB + BC + CA = 0.$$

7. Règle II. — Toutes les fois qu'au moyen d'un calcul on arrive à une équipollence binôme

$$x.AB = y.CD,$$

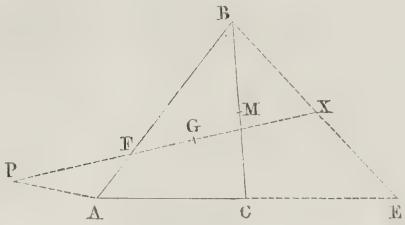
si l'on sait, de plus, que les droites AB, CD ne sont pas parallèles, on en conclura que les coefficients x et y sont nuls séparément.

En effet, si x et y n'étaient pas nuls, cette équipollence indiquerait que les droites AB, CD seraient parallèles, et que leur rapport est égal à celui de y à x. Ainsi une équipollence sert à déterminer deux quantités inconnues.

Montrons l'usage de ces Règles par des exemples faciles.

8. *Exemple I.* — On veut construire un triangle ABC (*fig.* 1), connaissant le centre de gravité G, le point F

Fig. 1.



situé au quart du côté AB, et l'extrémité E du côté AC, prolongé d'une quantité CE = AC.

Les conditions du problème sont exprimées par les équipollences

$$AE = 2AC, \quad AF = \frac{1}{4}AB, \quad AG = \frac{1}{3}(AB + AC),$$

puisque, M étant le milieu du côté BC, on a

$$AG = \frac{2}{3}AM,$$

et

$$AM = AB + BM = AB + \frac{1}{2}BC = AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}AB$$
$$= \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Les points inconnus sont les sommets A, B, C. En éliminant deux de ces points par la substitution dans la troisième équipollence des valeurs tirées des deux premières, il vient

$$3AG = 4AF + \frac{1}{2}AE.$$

Il faut pour cela que le point inconnu A entre dans la seule droite AG. Or on aura, par la Règle I,

$$AF = AG + GF, \quad AE = AG + GE,$$

par conséquent

$$3\,AG = 4\,AG + 4\,GF + \frac{1}{2}\,AG + \frac{1}{2}\,GE;$$

d'où l'on tire

$$-\frac{3}{2}\,AG = 4\,GF + \frac{1}{2}\,GE,$$

ou

$$GA = \frac{8}{3}\,GF + \frac{1}{3}\,GE.$$

Cette équipollence nous apprend qu'il faut prolonger GF, de manière qu'on ait $GP = \frac{8}{3}\,GF$, puis mener $PA = \frac{1}{3}\,GE$ (c'est-à-dire PA parallèle à GE et égal au tiers de GE), et A sera le sommet du triangle demandé.

Cherchons, dans la figure précédente, dans quels rapports se coupent les deux droites BE, FG au point X. Posons $BX = x.BE$ (ce qui exprime que le point X tombe sur la ligne BE, le rapport $BX : BE = x$ restant encore inconnu), et soit de même $FX = y.FG$. Par la Règle I, on a

$$AX = AB + BX = AB + x.BE,$$

et pareillement

$$AX = AF + y.FG.$$

Après avoir éliminé AX, ce qui donne

$$AB + x.BE = AF + y.FG,$$

nous pourrons, au moyen des équipollences données

$$AE = 2.AC, \quad AF = \frac{1}{4}\,AB, \quad AG = \frac{1}{3}\,(AB + AC),$$

obtenir une équipollence entre les seules droites AB, AC,

$$AB + 2x.AC - x.AB = \frac{1}{4}AB + \frac{y}{3}(AB + AC) - \frac{y}{4}AB;$$

et comme les droites AB, AC ne sont pas parallèles, il s'ensuit, d'après la Règle II, qu'on devra avoir séparément

$$1 - x - \frac{1}{4} - \frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 0, \quad 2x - \frac{y}{3} = 0,$$

ce qui donne

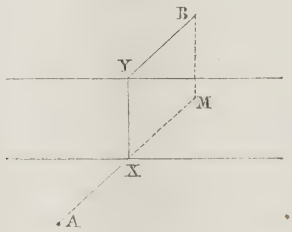
$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 6x = 3.$$

Par conséquent la droite FG coupe la droite BE en son milieu X, et l'on a

$$FX = 3FG.$$

9. *Exemple II.* — Soient A et B (*fig.* 2) deux points séparés par une rivière, que l'on doit traverser sur un

Fig. 2.



pont perpendiculaire aux deux rives. Déterminer la position XY de ce pont, de manière que la somme arithmétique des longueurs AX + XY + YB soit le plus petite possible.

L'équipollence (Règle II)

$$AX + XY + YB = AB$$

peut s'écrire sous la forme

$$AX + YB = AB - XY,$$

et comme la largeur XY de la rivière est connue en grandeur et en direction, nous pourrons construire la somme géométrique

$$AB - XY = AB + YX,$$

laquelle sera AM, en menant BM = YX. Puis, dans l'équipollence

$$AX + YB = AM,$$

on voit que la somme arithmétique des longueurs AX + YB sera minimum, quand AX tombera sur AM, et que par conséquent YB sera parallèle à cette droite AM.

10. Le Calcul des équipollences comprend le Calcul barycentrique, dont Moebius avait déjà montré les nombreuses applications. Ainsi le centre de gravité G des trois points A, B, C est exprimé par la relation

$$AG + BG + CG = 0,$$

d'où l'on peut déduire, au moyen de la Règle I du Calcul des équipollences, la relation

$$AG + AG - AB + AG - AC = 0, \quad \text{ou} \quad 3AG = AB + AC,$$

dont nous nous sommes servis plus haut.

Mais la partie de la méthode qui se rapporte aux produits de droites, et qui s'applique exclusivement aux figures tracées dans un même plan, appartient entièrement à M. Bellavitis.

11. Pour définir plus facilement ce qu'il faut entendre, dans la méthode des équipollences, par un monôme formé par la multiplication ou la division de plusieurs droites,

il est bon de commencer par définir l'*inclinaison* d'une droite.

De même que la *grandeur* d'une droite s'exprime par un nombre rapporté à une unité linéaire que l'on choisit arbitrairement, mais à laquelle on doit ensuite conserver constamment la même longueur; de même, par *inclinaison* d'une droite on entend l'angle que fait cette droite avec une autre droite choisie arbitrairement pour origine des inclinaisons. De là résulte qu'un angle BAC est exprimé par

$$\text{incl AC} - \text{incl AB},$$

en désignant par incl AB l'inclinaison de la droite AB. Les angles sont considérés comme comptés depuis la première lettre vers la dernière, et il faut avoir égard à leur signe. Ainsi l'angle CAB est de signe contraire à l'angle BAC, et est égal à

$$\text{incl AB} - \text{incl AC}.$$

12. Cela posé, un monôme tel que

$$\frac{\text{AB}.\text{CD}}{\text{EF}},$$

par exemple, sera équipollent à une droite GH, dont la grandeur aura pour valeur

$$\frac{\text{gr AB} \times \text{gr CD}}{\text{gr EF}},$$

et dont l'inclinaison sera

$$\text{incl GH} = \text{incl AB} + \text{incl CD} - \text{incl EF}.$$

On retiendra plus aisément cette dernière équation, en la rapprochant de la formule qui donne les logarithmes d'un produit et d'un quotient.

Quand on sait interpréter un monôme, alors, en ayant de plus égard à la définition donnée plus haut de la somme géométrique, on comprend la signification d'une équipollence quelconque entre des polynômes.

Pour mieux expliquer la signification d'un monôme, observons que ce monôme peut se ramener à une suite de proportions. Si l'on fait en sorte que la seconde droite ait une extrémité commune avec la première, en supposant que la quatrième doive avoir aussi une extrémité commune avec la troisième, une proportion peut s'écrire ainsi

$$AB : AC = OD : OX,$$

et cette équipollence comprendra les deux équations

$$\text{gr}\,AB : \text{gr}\,AC = \text{gr}\,OD : \text{gr}\,OX,$$
$$\text{incl}\,AB - \text{incl}\,AC = \text{incl}\,OD - \text{incl}\,OX.$$

Pour construire OX, prenons sur AB la longueur AD′ égale en grandeur à OD; formons le triangle AD′X′ homothétique à ABC, de sorte que le point X′ tombe sur AC. Alors le triangle ODX sera *directement* égal au triangle AD′X′, en entendant, par *directement* égal, que l'on pourra faire coïncider AD′X′ avec ODX, en le transportant dans son plan, sans retournement.

13. En réfléchissant attentivement sur les définitions que nous avons admises, on reconnaît qu'elles n'impliquent aucune contradiction, et que les équipollences peuvent se traiter absolument comme les équations, et conduiront toujours à des résultats exacts quand on les interprétera conformément aux principes de la méthode. Il s'ensuit de là que toute équation relative aux points d'une droite peut se changer en une équipollence relative

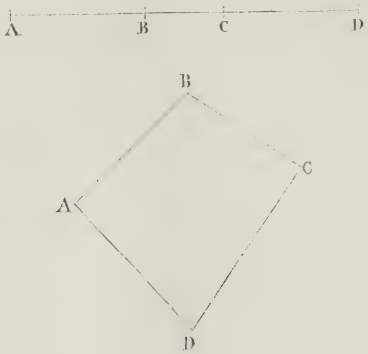
aux points d'un plan, en ayant soin de tenir compte du signe de chaque droite. En voici un exemple :

Entre quatre points A, B, C, D en ligne droite (*fig.* 3), on a la relation

$$AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0$$

(remarquons que, si BC, CD sont positifs, DB sera négatif); ce qui se démontre en observant que $CD = AD - AC$, $BC = AC - AB$, $DB = AB - AD$, et qu'en substituant

Fig. 3.



ces valeurs, la relation devient identique. On démontrera de la même manière que, pour quatre points A, B, C, D d'un plan, on a l'équipollence

$$(1) \qquad AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0.$$

Pour la construire, on peut imaginer qu'elle soit divisée par une droite OH, prise pour origine des inclinaisons et pour unité de longueur (cette ligne OH pouvant être une quelconque des lignes AB, CD, . . .). Les trois termes de l'équipollence pourront de cette manière exprimer les

côtés LM, MN, NL d'un triangle, puisque l'on a, par la Règle I,

$$LM + MN + NL = 0.$$

Pour interpréter cette équipollence (1), ainsi que toute autre équipollence trinôme, nous poserons la Règle suivante :

14. Règle III. — Si, dans une équipollence trinôme, deux termes ont une égale inclinaison, la grandeur de l'autre terme sera égale à la somme des grandeurs des deux premiers.

En effet, si incl LM = incl MN (*fig.* 4), les trois points

Fig. 4.

L, M, N seront en ligne droite (au lieu de former un triangle), et, par suite,

$$\text{gr}\,NL = \text{gr}\,LM + \text{gr}\,MN.$$

Si, au contraire, les inclinaisons de deux termes de l'équipollence diffèrent de 90 degrés, le triangle LMN, dont les côtés sont respectivement équipollents aux termes de l'équipollence, sera rectangle, et les grandeurs de ses côtés satisferont au théorème connu ; c'est-à-dire que, si incl LM — incl MN = $\pm 90^\circ$, on aura

$$(NL)^2 = (LM)^2 + (MN)^2.$$

Si les inclinaisons des trois termes forment une progression arithmétique, c'est-à-dire si l'on a

$$\text{incl}\,LM - \text{incl}\,MN = \text{incl}\,MN - \text{incl}\,NL,$$

le triangle LMN sera isoscèle, et, par conséquent, on aura

$$\text{gr LM} = \text{gr NL}.$$

Si enfin on a

$$\text{incl LM} - \text{incl MN} = 120^\circ, \quad \text{incl MN} - \text{incl NL} = 120^\circ,$$

ces différences étant égales aux angles extérieurs en M et en N du triangle LMN, ce triangle sera équilatéral, et, par suite, on aura

$$\text{gr LM} = \text{gr MN} = \text{gr NL}.$$

15. Appliquons cette Règle à l'équipollence précédente (1). Si les deux premiers termes ont des inclinaisons égales, c'est-à-dire si l'on a

$$\text{incl AB} + \text{incl CD} = \text{incl AD} + \text{incl BC},$$

en remarquant que

$$\text{incl AD} - \text{incl AB} = \text{angle BAD},$$
$$\text{incl CB} - \text{incl CD} = \text{angle DCB},$$

il viendra

$$\text{angle BAD} + \text{angle DCB} = \text{incl CB} - \text{incl BC} = 180^\circ.$$

Donc, si la somme de deux angles opposés d'un quadrilatère est égale à 180°, on aura, par la Règle en question,

$$\text{gr}(\text{AB}.\text{CD}) + \text{gr}(\text{AD}.\text{BC}) = \text{gr}(\text{AC}.\text{DB}),$$

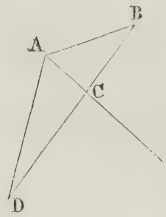
ce qui donne le théorème connu de Ptolémée.

Si, au lieu de cela, dans le quadrilatère ABCD, les deux angles opposés BAD, DCB ont pour somme 90° ou 270°, on aura, par la seconde partie de la Règle,

$$\text{gr}(\text{AB}.\text{CD})^2 + \text{gr}(\text{AD}.\text{BC})^2 = \text{gr}(\text{AC}.\text{DB})^2.$$

Si les trois points B, C, D (*fig.* 5) sont en ligne droite,

Fig. 5.



et que, de plus, on ait angle BAC = angle CAD = 60°, il viendra alors

$$\begin{aligned}&\text{incl}(AB.CD) - \text{incl}(AD.BC)\\ &\quad = \text{incl}\,AB + \text{incl}\,CD - \text{incl}\,AD - \text{incl}\,BC\\ &\quad = \text{incl}\,AB - \text{incl}\,AD = -120^\circ.\end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned}&\text{incl}(AD.BC) - \text{incl}(AC.DB)\\ &\quad = \text{incl}\,AD - \text{incl}\,AC + \text{incl}\,BC - \text{incl}\,DB\\ &\quad = 60^\circ - 180^\circ = -120^\circ;\end{aligned}$$

donc, en vertu de la dernière partie de la Règle III, nous aurons

$$\text{gr}(AB.CD) = \text{gr}(AD.BC) = \text{gr}(AC.DB);$$

d'où il résulte ensuite que (BC, $\frac{1}{2}$ BD, CD étant trois droites en progression arithmétique) AD, 2 AC, AB seront en progression harmonique.

16. La méthode peut encore servir à démontrer les théorèmes de la Géométrie élémentaire. Ainsi, par

exemple, si à la droite AC (*fig.* 6) on mène les deux perpendiculaires égales et opposées CB, CD, on a

$$AB = AC + CB, \quad AD = AC + CD;$$

Fig. 6.

d'où, à cause de $CD = -CB$,

$$AB.AD = AC.AC + CB.CD.$$

Les deux termes du second membre ont des inclinaisons égales, puisque

$$90^\circ = \text{incl}\,CB - \text{incl}\,AC = \text{incl}\,AC - \text{incl}\,CD;$$

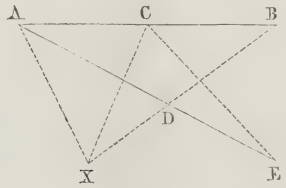
par conséquent

$$gr(AB.AD) = gr(AB)^2 = gr(AC)^2 + gr(CB)^2.$$

17. Donnons encore un exemple de problème.

Construire, sur une base donnée AB (*fig.* 7), un

Fig. 7.



triangle ABX, connaissant le produit de ses côtés AX, BX, et la différence BAD des angles à la base, ce qui re-

vient à dire que l'on doit avoir

$$\text{angle DAX} = \text{angle XBA},$$

ou

$$\text{incl AX} - \text{incl AD} = \text{incl BA} - \text{incl BX}.$$

On pourra donner à AD une longueur telle, que les deux conditions du problème soient exprimées par l'équipollence

$$AX . BX = AD . BA.$$

En écrivant AX — AB au lieu de BX, la droite AX sera donnée par une équipollence du second degré, qui, résolue à la manière ordinaire, donne

$$AX - \frac{1}{2} AB = \sqrt{\frac{1}{4} (AB)^2 + AD . BA}.$$

En prenant $AC = \frac{1}{2} AB$, $AE = 2 AD$, il vient

$$AX - AC = \sqrt{AC(AC - AE)},$$

ou

$$CX = \sqrt{AC . EC} = \sqrt{CA . CE},$$

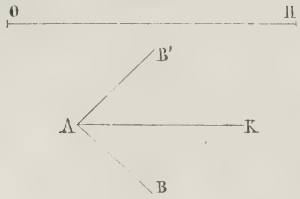
ce qui nous montre comment on doit construire la ligne CX, qui est bissectrice de l'angle ACE, et moyenne proportionnelle entre CA et CE.

18. Les conventions adoptées jusqu'ici ne sont pas suffisantes pour exprimer que les angles sont égaux et de signe contraire, que les triangles sont égaux et inversement placées (ou *symétriques*, comme on les appelle, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent coïncider qu'après le retournement du plan de l'un d'eux), etc.

M. Bellavitis appelle *conjuguée* d'une droite ou d'une figure, la droite ou la figure que l'on obtient en faisant faire à la première une demi-révolution autour d'une droite parallèle à celle que l'on a prise pour origine des inclinaisons.

Ainsi, si OH (*fig.* 8) est l'origine des inclinaisons, en menant AK parallèle à OH, et construisant le triangle

Fig. 8.



AKB' *inversement égal* au triangle AKB, la droite AB', ainsi que toute autre qui lui sera équipollente, sera dite *conjuguée* de AB, ce que l'on écrira ainsi :

$$AB' = \text{conj}\, AB.$$

Il est évident que l'on a

$$\text{gr}(\text{conj}\, AB) = \text{gr}\, AB,$$
$$\text{incl}(\text{conj}\, AB) = -\, \text{incl}\, AB.$$

Il est est facile, en outre, de s'assurer que l'on a cette Règle :

19. Règle IV. — En même temps qu'une équipollence donnée, a toujours lieu aussi sa conjuguée, laquelle s'obtient en remplaçant chaque droite par sa conjuguée.

Le produit de deux droites conjuguées entre elles est égal au carré de leur grandeur commune, et a une inclinaison nulle, c'est-à-dire que

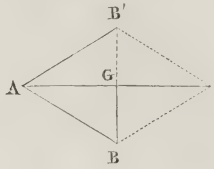
$$AB.\text{conj}\, AB = \text{gr}(AB)^2.$$

Une droite, divisée par sa conjuguée, donne pour quotient l'unité, avec une inclinaison double de celle de la droite, c'est-à-dire que

$$\text{gr}\left(\frac{AB}{\text{conj}\, AB}\right) = 1, \quad \text{incl}\left(\frac{AB}{\text{conj}\, AB}\right) = 2\,\text{incl}\, AB.$$

La somme géométrique d'une droite et de sa conjuguée a une inclinaison nulle, et est égale au double de la pro-

Fig. 9.



jection de la droite sur l'axe d'inclinaison nulle, c'est-à-dire que l'on a (*fig.* 9)

$$AB + \text{conj}\,AB = 2\,AG.$$

On voit encore que

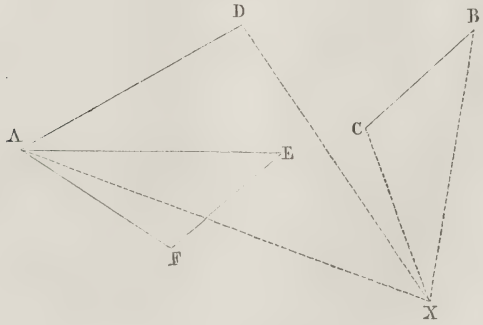
$$AB - \text{conj}\,AB = B'B = 2\,GB,$$

dont l'inclinaison est de 90 degrés.

20. Le problème suivant va montrer l'usage de cette Règle.

Trouver le sommet commun X de deux triangles inversement semblables (*fig.* 10), dont on donne les bases AD, BC.

Fig. 10.



La similitude est exprimée par les deux équations

$$\text{gr}\,AX : \text{gr}\,AD = \text{gr}\,BX : \text{gr}\,BC,$$
$$\text{angle}\,DAX = -\,\text{angle}\,CBX.$$

Cette dernière peut s'écrire

$$\begin{aligned}\text{incl}\,AX - \text{incl}\,AD &= -(\text{incl}\,BX - \text{incl}\,BC)\\ &= \text{incl}\,(\text{conj}\,BX) - \text{incl}\,(\text{conj}\,BC),\end{aligned}$$

et l'on voit par là que les conditions du problème sont données par l'équipollence

$$AX : AD = \text{conj}\,BX : \text{conj}\,BC.$$

En y faisant $\text{conj}\,BX = \text{conj}\,AX - \text{conj}\,AB$, on a, en développant,

$$\text{conj}\,BC.AX = AD.\text{conj}\,AX - AD.\text{conj}\,AB,$$

et, en même temps que cette équipollence, a lieu sa conjuguée,

$$BC.\text{conj}\,AX = \text{conj}\,AD.AX - \text{conj}\,AD.AB.$$

Entre ces équipollences, nous pourrons éliminer conj AX, et nous aurons, pour déterminer AX, l'équipollence

$$\begin{aligned}&(AD.\text{conj}\,AD - BC.\text{conj}\,BC)\,AX\\ &\quad = AD\,(AB.\text{conj}\,AD + BC.\text{conj}\,AB).\end{aligned}$$

En prenant pour origine des inclinaisous la droite AB, il vient $\text{incl}\,AB = 0$, $AB = \text{conj}\,AB$, et si l'on détermine la droite $AE = \text{conj}\,AD$ (c'est-à-dire, si l'on construit le triangle ABE inversement égal à ABD), et que l'on mène $EF = BC$, on aura

$$\begin{aligned}&(AD.\text{conj}\,AD - BC.\text{conj}\,BC)\,AX\\ &\quad = AB.AD\,(\text{conj}\,AD + BC)\\ &\quad = AB.AD\,(AE + BC) = AB.AD.AF.\end{aligned}$$

Pour construire, d'après cela, la ligne AX, il suffira de déterminer son inclinaison. Or, comme chacun des produits AD.conj AD, BC.conj BC a une inclinaison nulle, on aura alors

$$\begin{aligned}\text{incl AX} &= \text{incl}(\text{AB.AD.AF}) = \text{incl AD} + \text{incl AF}\\ &= -\text{incl AE} + \text{incl AF} = \text{angle EAF}.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\text{angle BAX} = \text{angle EAF}.$$

21. OH, OI étant deux droites égales et perpendiculaires entre elles, si l'on multiplie une droite par le rapport $\frac{\text{OI}}{\text{OH}}$, on ne fera qu'augmenter l'inclinaison de 90 degrés, et, si l'on réitère cette multiplication, on aura

$$\left(\frac{\text{OI}}{\text{OH}}\right)^2 \text{AB} = -\text{AB}.$$

Donc le rapport $\frac{\text{OI}}{\text{OH}}$ se calcule précisément comme le $\sqrt{-1}$ de l'Algèbre. M. Bellavitis indique, pour abréger, ce rapport par un signe particulier, que nous remplacerons ici par la lettre i, généralement employée en Analyse pour désigner le symbole $\sqrt{-1}$.

Il est conforme aux principes du calcul que i^u.AB exprime une droite égale à AB en grandeur, et dont l'inclinaison surpasse celle de AB de $u.90^\circ$, u pouvant être fractionnaire.

Lorsqu'on prend la conjuguée d'une équipollence, chaque i se change en $-i$, et chaque i^u en $(-i)^u$ ou i^{-u}.

Le symbole 1_t, employé par Cauchy, d'après Français et Mourey, est identique avec $i^{\frac{2}{\pi}t}$.

22. Pour exprimer l'aire d'un triangle ABC (*), on

(*) A partir d'ici, le lecteur est prié de faire la figure.

rencontre l'expression de AC′, qui est la droite AC rabattue autour de AB. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{gr} AC' &= \operatorname{gr} AC, \\ \operatorname{incl} AC' - \operatorname{incl} AB &= \operatorname{incl} AB - \operatorname{incl} AC \\ &= \operatorname{incl}(\operatorname{conj} AC) - \operatorname{incl}(\operatorname{conj} AB). \end{aligned}$$

Ces deux équations sont comprises dans l'équipollence

$$AC' = \frac{AB.\operatorname{conj} AC}{\operatorname{conj} AB}.$$

On en tire, P étant le milieu de CC′,

$$\begin{aligned} \operatorname{conj} AB.PC &= \frac{1}{2} \operatorname{conj} AC.CC' \\ &= \frac{1}{2}(AC.\operatorname{conj} AB - AB.\operatorname{conj} AC). \end{aligned}$$

Le premier membre a pour grandeur 2 ABC, et pour inclinaison $-\operatorname{incl} AB + \operatorname{incl} PC = 90^\circ$. En divisant donc les deux membres par $2i$, il en résulte

$$ABC = \frac{i}{4}(AB.\operatorname{conj} AC - AC.\operatorname{conj} AB),$$

expression qui, d'après la Règle I, peut s'écrire

$$ABC = \frac{i}{4}(AB.\operatorname{conj} BC - \operatorname{conj} AB.BC).$$

23. Faisons quelques applications de cette formule.

En parcourant le périmètre d'un polygone ABCDE, on a mesuré ses côtés et leurs inclinaisons sur le méridien magnétique. Pour calculer l'aire ABCDE, on observe qu'elle est la somme des triangles ABC, ACD, ADE, et que, par suite, elle a pour expression

$$\frac{i}{4}(AB.\operatorname{conj} BC + AC.\operatorname{conj} CD + AD.\operatorname{conj} DE - \text{les termes conj.}).$$

D'après la Règle I, aux diagonales AC, AD on peut substituer les sommes géométriques AB + BC, AB + BC + CD, d'où il résulte que la formule nous apprend que l'aire du pentagone est la somme de six triangles, dont chacun a deux côtés équipollents à deux des côtés AB, BC, CD, DE (en omettant EA).

Si des sommets du polygone ABC on mène les droites équipollentes entre elles $AA' = BB' = CC'$, la somme algébrique des aires des triangles ABA', BCB', CAC' est toujours nulle, car elle est exprimée par

$$\frac{i}{4}\,(\mathrm{AB.conj\,AA'} + \mathrm{BC\,conj\,BB'} + \mathrm{CA.conj\,CC'} - \text{les termes conj.}),$$

et l'on a

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 0.$$

24. Maintenant que nous avons exposé tous les principes du calcul des équipollences, nous pouvons donner quelques applications à la solution graphique des problèmes de géométrie.

I. *En un point donné* A, *construire un triangle* AXY, *semblable à un triangle donné, et dont les sommets* X, Y *soient aux distances* f, g *d'un point donné* O.

Connaissant la forme du triangle AXY, on connaît par conséquent le rapport

$$\frac{\mathrm{AY}}{\mathrm{AX}} = ni^{\alpha},$$

tant par sa grandeur n que par son angle $\mathrm{XAY} = \alpha$, et la Règle I nous donnera les équipollences

$$\mathrm{OA} + \mathrm{AX} = \mathrm{OX}, \quad \mathrm{OA} + ni^{\alpha}.\mathrm{AX} = \mathrm{OY}.$$

En éliminant AX, il vient

$$\mathrm{OY} - ni^{\alpha}.\mathrm{OX} = \mathrm{OA} - ni^{\alpha}.\mathrm{OA}.$$

Le second membre de cette équipollence deviendra OU, si l'on construit la droite $AU = ni^{\alpha}.AO$, ce qui veut dire que le triangle AOU est semblable au triangle donné (auquel AXY doit être semblable). Ensuite, l'équipollence

$$OY - ni^{\alpha}.OX = OU,$$

comparée à l'identité

$$OY - UY = OU,$$

nous montre que sur la droite OU on devra construire un triangle OUY, dont on connaît les longueurs g, nf des deux côtés OY et $UY = nf = f\frac{AU}{AO}$. Ayant trouvé Y, on achèvera facilement le triangle AYX, directement semblable à AUO.

Plusieurs autres problèmes se résolvent comme le précédent, en les ramenant à une équipollence trinôme, qui contient deux inconnues.

II. *Couper deux droites données* AD, BE *par une troisième* XY, *de manière que les segments* AX, BY, XY *soient dans le même rapport que les lignes* AD, BE *et l'unité de longueur.*

Nous aurons

$$AX = r.AD, \quad BY = r.BE, \quad XY = r.i^{u},$$

u étant l'inclinaison inconnue de XY. En substituant ces valeurs dans l'équipollence

$$AX + XY + YB = AB,$$

il vient

$$r.AD + r.i^{u} - r.BE = AB.$$

Si l'on mène DU équipollente à EB, cette relation prend la forme trinôme

$$\frac{1}{r}.AB - i^{u} = AD - BE = AU.$$

En comparant celle-ci à l'identité

$$AV - VU = AU,$$

elle nous indique de couper en V la droite AB par un arc décrit du centre U, et d'un rayon égal à l'unité de longueur, après quoi l'on aura

$$\frac{AB}{AV} = \frac{AX}{AD},$$

de telle sorte que BX sera parallèle à VD, et XY parallèle à $VU = i^u$.

III. *Inscrire dans un cercle un quadrilatère* XYZT, *de manière que les trois côtés* XY, YZ, ZT *passent respectivement par les points* A, B, C, *et que le quatrième côté* TX *ait une longueur donnée.*

Soit OH le rayon que nous prendrons pour origine des inclinaisons, et supposons les sommets du quadrilatère déterminés par les relations

$$OX = i^x.OH, \quad OY = i^y.OH, \quad OZ = i^z.OH, \quad OT = i^t.OH.$$

La condition pour que AXY soit une droite est donnée par l'équipollence

$$OA - i^x.OH = p(OA - i^y.OH).$$

Au moyen de sa conjuguée

$$\text{conj}OA - i^{-x}.OH = p(\text{conj}OA - i^{-y}.OH),$$

on éliminera p, ce qui donnera

$$(1) \qquad i^x = \frac{OA - i^y.OH}{OH - i^y.\text{conj}OA}.$$

On trouvera de même

$$(2) \quad i^y = \frac{OB - i^z.OH}{OH - i^z.\text{conj}OB}, \qquad (3) \quad i^z = \frac{OC - i^t.OH}{OH - i^t.\text{conj}OC}.$$

En désignant maintenant par δ l'arc TX, on aura

$$(4) \qquad i^t = i^{x-\delta}.$$

On exécutera les substitutions de ces équipollences les unes dans les autres, en faisant les constructions suivantes :

$$(5) \qquad AA_1 = -OB, \quad HH_1 = -\frac{OA.\operatorname{conj}OB}{OH},$$

après quoi l'équipollence (2) donnera, par la substitution dans (1),

$$i^x = \frac{OA_1 + i^z.OH_1}{\operatorname{conj}OH_1 + i^z.\operatorname{conj}OA_1}.$$

En combinant cette dernière avec (3), et posant

$$(6) \qquad A_1A_2 = \frac{OH_1.OC}{OH}, \quad H_1H_2 = \frac{OA_1.\operatorname{conj}OC}{OH},$$

on aura

$$i^x = \frac{OA_2 - i^t.OH_2}{\operatorname{conj}OH_2 - i^t.\operatorname{conj}OA_2}.$$

Substituant enfin la valeur (4), et faisant

$$(7) \qquad OW = OH_2 + i^\delta.\operatorname{conj}OH_2, \quad OU = \frac{OH.OW}{\operatorname{conj}OA_2},$$

on aura

$$i^x.OH + i^{\delta-x}.\frac{OH.OA_2}{\operatorname{conj}OA_2} = OU.$$

Cette équipollence, comparée avec la relation

$$OX + XU = OU,$$

nous apprend que le point X s'obtiendra en coupant le cercle donné par un autre cercle égal, ayant pour centre U.

Les équipollences (5), (6), (7) indiquent clairement la

construction qu'il faut faire. On mènera AA_1 équipollent à BO; on construira le triangle OAK inversement semblable à OHB, et l'on mènera $HH_1 = KO$; on formera les triangles OH_1L_1, directement semblable à OHC, et OA_1K_1 inversement semblable au même triangle OHC, et l'on mènera $A_1A_2 = OL_1$, $H_1H_2 = OK_1$. Soit la corde HI du cercle égale au côté TX du quadrilatère cherché. Menons OW perpendiculaire à cette ligne HI et ayant, par conséquent, pour inclinaison $\frac{1}{2}\delta$, et coupons-la de telle manière que H_2W soit égal à OH_2. Enfin, ayant construit OWU inversement semblable à OA_2H, la droite perpendiculaire sur le milieu de OU coupera le cercle donné au sommet X du quadrilatère cherché.

La direction du rayon OH est arbitraire. En la faisant coïncider avec OC, les triangles OHC, OH_1L_1, OA_1K_1 se réduisent à trois droites coupées proportionnellement.

25. Si O est un point fixe et que OM dépende d'une variable *réelle* t au moyen de l'équipollence

$$OM = \varphi(t),$$

tous les points M formeront une ligne.

L'équipollence comprend les divers systèmes de coordonnées. Ainsi, si

$$OM = x + yi,$$

et que x et y soient des fonctions de t, ou bien qu'elles soient liées entre elles par une équation, on aura le système des coordonnées orthogonales. Si

$$OM = ri^u,$$

r et u seront les coordonnées polaires. Du reste, OM pourra être représentée de toute autre manière; ainsi,

par exemple, la relation

$$\mathrm{OM} = at + bi^t$$

exprime évidemment la génération d'une cycloïde;

$$\mathrm{OM} = ai^t + bi^{2t},$$

celle d'une épicycloïde.

Soit M′ un point de la courbe infiniment voisin de M, et correspondant à la valeur $t + dt$ de la variable indépendante. La droite

$$\mathrm{MM'} = \mathrm{OM'} - \mathrm{OM} = d.\mathrm{OM}$$

aura pour direction-limite celle de la tangente. Si l'on multiplie $d.\mathrm{OM}$ par un facteur réel quelconque p, l'équipollence

$$\mathrm{MT} = p.d\mathrm{OM},$$

ou, si l'on veut,

$$\mathrm{MT} = p \cdot \frac{d.\mathrm{OM}}{dt}$$

représentera un point quelconque de la tangente, en donnant successivement à la variable p toutes les valeurs réelles. Si l'on ne veut considérer que la direction, on pourra supposer, pour plus de simplicité, $p = 1$.

Si l'on augmente l'inclinaison de la tangente d'un angle droit, en multipliant la valeur de MT par i, on aura l'équation de la normale

$$\mathrm{MN} = ip.d\mathrm{OM}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{MN} = ip \cdot \frac{d\mathrm{OM}}{dt}.$$

Ainsi, l'équation du cercle étant

$$\mathrm{OM} = ai^t,$$

celle de la tangente sera [à cause de $d.i^t = i\,dt.i^t$ (n° 26)]

$$\mathrm{MT} = ia.i^t,$$

et celle de la normale

$$MN = i^2 a . i' = - OM.$$

26. Pour montrer quelques applications des équipollences aux courbes, considérons la relation

$$OM = \cos t . OA + \sin t . OB,$$

qui appartient à une ellipse rapportée à deux demi-diamètres conjugués OA, OB. La tangente au point M est donnée par la droite MT, qui est la dérivée de OM par rapport à la variable t, savoir :

$$MT = \frac{d.OM}{dt} = - \sin t . OA + \cos t . OB.$$

Si l'on cherche le point Q où la tangente rencontre OA prolongé, il faudra prendre la somme géométrique de OM et de $- MT \cdot \frac{\sin t}{\cos t}$, ce qui donne

$$OQ = \cos t . OA + \sin t . OB + \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot OA - \sin t . OB$$
$$= \frac{1}{\cos t} \cdot OA.$$

La droite

$$ON = - \sin t . OA + \cos t . OB,$$

équipollente à la tangente précédente MT, donne un autre point N de l'ellipse, en changeant seulement, dans l'expression de OM t en $\frac{\pi}{2} + t$. Les droites OM, ON sont aussi deux diamètres conjugués.

Il est facile de s'assurer que l'on a

$$OM^2 + ON^2 = OA^2 + OB^2.$$

Par conséquent, les deux points F, F_1, tels que l'on ait

$$OF_1 = -OF, \quad OF^2 = OM^2 + ON^2,$$

restent toujours les mêmes, quels que soient les demi-diamètres conjugués OM, ON que l'on considère. L'équipollence précédente donne

$$\begin{aligned} ON^2 &= OF^2 - OM^2 = (OF - OM)(OF + OM) \\ &= MF(OM - OF_1) = MF.F_1M, \end{aligned}$$

de laquelle on conclut

$$\begin{aligned} gr^2\,ON &= gr\,MF.gr\,F_1M, \\ 2\,incl\,ON &= incl\,MF + incl\,F_1M; \end{aligned}$$

et comme ON est parallèle à la tangente en M, il s'ensuit de là que cette tangente sera bissectrice de l'angle formé par un rayon vecteur MF et le prolongement de l'autre F_1M. En outre, le carré du demi-diamètre ON, conjugué de OM, est égal au produit des deux rayons vecteurs MF, MF_1.

Pour déterminer les foyers, connaissant deux diamètres conjugués, on pourra construire

$$OF = \sqrt{OA\left(OA + \frac{OB^2}{OA}\right)},$$

c'est-à-dire que, ayant fait le triangle OBD directement semblable à OAB, et mené la droite AE = OD, OF sera une moyenne proportionnelle entre OA et OE=OA+OD, et partagera l'angle AOE en deux parties égales.

On pourrait encore prendre la formule

$$OF = \sqrt{(OA + i.OB)(OA - i.OB)},$$

c'est-à-dire, du point A mener $AK = -AK_1$, égales et perpendiculaires à OB, puis construire la moyenne géométrique

$$OF = \sqrt{OK.OK_1}.$$

27. Si u est exprimé en parties de l'angle droit, on aura

$$\cos u = \frac{i^u + i^{-u}}{2}.$$

Mais si l'angle est exprimé en parties du rayon, alors

$$\cos t = \frac{i^{\frac{2t}{\pi}} + i^{-\frac{2t}{\pi}}}{2},$$

ou, à cause de $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

M. Bellavitis simplifie la notation en posant $\varepsilon = e^i$. Malgré l'avantage que présente cette simplification dans les calculs, nous conserverons ici la notation habituelle, pour nous écarter le moins possible des usages reçus. Ainsi e^{it} ou ε^t est un *coefficient d'inclinaison* comme i^u, avec cette différence que l'unité de u est l'angle droit, et celle de t l'arc égal au rayon.

Le second membre de l'équipollence

$$\mathrm{OM} = \cos t . \mathrm{OA} + \sin t . \mathrm{OB}$$

peut se développer ainsi

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OA} - i . \mathrm{OB})e^{it} + \frac{1}{2}(\mathrm{OA} + i . \mathrm{OB})e^{-it}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{OK} . e^{it} + \frac{1}{2}\mathrm{OK}_1 . e^{-it},$$

ce qui fait voir que l'ellipse peut s'engendrer à la manière d'une hypocycloïde, au moyen des deux rotations opposées e^{it}, e^{-it}.

28. Avant d'établir les formules générales relatives aux courbes, il ne sera peut-être pas inutile d'étudier

quelques-unes des propriétés de la cycloïde, représentée par l'équipollence

$$(1) \qquad \mathrm{OM} = t - ie^{it}.$$

En prenant la dérivée par rapport à t, on a, pour la tangente à la cycloïde,

$$(2) \qquad \mathrm{MT} = 1 + e^{it}.$$

On a, pour une portion de la normale,

$$\mathrm{MN} = i.\mathrm{MT} = i + ie^{it},$$

ce qui nous donne

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OM} + \mathrm{MN} = t + i.$$

De même que $\mathrm{OC} = t$ donne la position du centre du cercle générateur, de même on aura

$$\mathrm{CN} = \mathrm{ON} - \mathrm{OC} = i;$$

donc la normale passe par le point N, où le cercle générateur touche la base DB.

On obtient un autre point R de la normale en posant

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OM} + p.\mathrm{MN} = t - ie^{it} + pi(1 + e^{it}).$$

Pour que cette valeur donne le point d'intersection de cette normale avec la normale infiniment voisine, il faut que le point R ne change pas lorsqu'on donne à t un accroissement infiniment petit ω, pourvu que l'on donne en même temps à p un accroissement convenable ϖ. On doit donc avoir

$$(1 + e^{it} - pe^{it})\omega + i(1 + e^{it})\varpi = 0.$$

Tirant de là la valeur de $\frac{\varpi}{\omega}$, laquelle, étant réelle, devra

être égale à sa propre conjuguée, il vient

$$\frac{\varpi}{\omega} = \frac{pe^{it} - e^{it} - 1}{i(1 + e^{it})} = \frac{pe^{-it} - e^{-it} - 1}{-i(1 + e^{-it})}.$$

d'où

$$\begin{aligned} &-ip + i + ie^{-it} - ipe^{it} + ie^{it} + i \\ &\quad = ip - i - ie^{it} + ipe^{-it} - ie^{-it} - i, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$p = 2.$$

Donc le rayon de courbure MR est double de la normale MN.

Le lieu des centres de courbure, c'est-à-dire la développée de la cycloïde, est représentée par

$$\mathrm{OR} = t + ie^{it} + 2i,$$

et est une cycloïde égale à la cycloïde primitive

$$\mathrm{OM} = t - e^{it}.$$

Si de chaque point M de la cycloïde on mène la droite MS, formant avec MR un angle donné α, et ayant avec MR un rapport donné a, c'est-à-dire si l'on prend

$$\mathrm{MS} = ae^{i\alpha}.\mathrm{MR},$$

il viendra

$$\mathrm{OS} = t - ie^{it} + 2aie^{i\alpha}(1 + e^{it}) = 2aie^{i\alpha} + t + (2ae^{i\alpha} - 1)ie^{it},$$

et par conséquent la courbe S est aussi engendrée par la composition du mouvement progressif, exprimé par le terme t, avec un mouvement rotatoire de rayon constant $2ae^{i\alpha} - 1$. Si $a = \cos\alpha$, la courbe S devient une cycloïde ordinaire, et elle est une *développée imparfaite* de la cycloïde M.

Si la cycloïde M se meut parallèlement à la base, elle aura pour expression

$$\mathrm{OM} = \tau + t - ie^{it}, \tag{3}$$

τ étant un paramètre de position. Pour trouver les trajectoires orthogonales de toutes ces cycloïdes, observons que la même équation (3) représentera aussi la trajectoire cherchée, si l'on détermine t en fonction de τ, de manière à particulariser dans chaque cycloïde le point où celle-ci est coupée par la trajectoire. La tangente à la trajectoire sera, par suite, représentée par la dérivée

$$\frac{d\tau}{dt} + 1 + e^{it},$$

et celle-ci doit être perpendiculaire à la tangente $1 + e^{it}$ de chaque cycloïde; d'où l'on conclut que

$$\frac{d\tau}{dt} = -2,$$

et, partant,

$$\tau = C - 2t.$$

Donc toutes les trajectoires orthogonales sont exprimées par l'équipollence

$$OM = C - t - ie^{it},$$

et ce sont d'autres cycloïdes égales à la proposée.

La dérivée de l'arc de cycloïde est

$$\begin{aligned} \operatorname{gr} MT &= \sqrt{MT \,.\, \operatorname{conj} MT} = \sqrt{(1 + e^{it})(1 + e^{-it})} \\ &= e^{\frac{1}{2}it} + e^{-\frac{1}{2}it} = 2\cos\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

29. Quelle que soit la fonction OM qui détermine une courbe, nous pourrons déterminer la développée par les calculs suivants. dOM est la direction de la tangente; par conséquent, le rayon de courbure

$$MR = \frac{i}{\lambda} \cdot d\,OM$$

est une position de la normale, et la développée, comme enveloppe de toutes les normales, sera donnée par la relation

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\, d\mathrm{OM},$$

pourvu que λ soit une fonction du t contenu dans OM, telle que MR devienne tangente à la développée au point R. Pour cette raison la ligne

$$d\mathrm{OR} = d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda} \cdot d^2\mathrm{OM} - \frac{i\, d\lambda}{\lambda^2} \cdot d\mathrm{OM}$$

doit être parallèle à la ligne $i.d\mathrm{OM}$. En multipliant par conj dOM, on voit que

$$d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda} \cdot \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM}$$

devient parallèle à i. En ajoutant donc à cette expression sa conjuguée, on aura

$$2\, d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\left(\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM} - d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM}\right) = 0.$$

On obtient ainsi la valeur de λ, d'où l'on déduit que

$$\mathrm{MR} = \frac{2(d\mathrm{OM})^2.\,\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM} - \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM}}.$$

La valeur de λ qu'il faut substituer dans $\mathrm{MR} = \frac{i}{\lambda}\, d\mathrm{OM}$ peut se tirer encore du développement de

$$\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} = l + i\lambda,$$

parce que cette supposition rend identiquement nulle l'expression

$$2 + \frac{i}{\lambda}\left(\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} - \frac{\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM}}{\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}\right).$$

30. Si, outre la ligne

$$MT = \frac{dOM}{dt},$$

on construit la ligne

$$MU = \frac{d^2OM}{dt},$$

et qu'on abaisse UL perpendiculaire sur MT, on aura

$$LU = i\lambda . MT,$$

et, par suite, le rayon de courbure est

$$MR = \frac{MT^2}{UL}.$$

Le rayon de courbure peut aussi se trouver en cherchant le cercle qui a un contact du second ordre avec la courbe M. Un point N de ce cercle sera représenté par

$$ON = OR + e^{iu}.RM.$$

En prenant la dérivée, nous devrons supposer OR et RM constants, et faire ensuite $u = 0$. Nous aurons ainsi

$$\frac{dON}{du} = i.RM, \quad d^2ON = (i\,d^2u - du^2).RM,$$

quantités que nous devrons égaler aux différentielles dM, d^2M. En les divisant l'une par l'autre il vient

$$\frac{d^2OM}{dOM} = \frac{d^2u}{du} + i\,du,$$

d'où il s'ensuit que le rayon de courbure RM sera donné par la relation

$$dOM = i\,du.RM,$$

ce qui coïncide avec la relation déjà trouvée $MR = \frac{i}{\lambda}dOM$, puisque $du = \lambda$.

Quelquefois on emploiera avec avantage l'équipollence

$$\mathrm{OM} = \int e^{i\theta} ds,$$

θ étant l'inclinaison de la tangente. D'après cette relation, on a

$$\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} = \frac{d^2 s}{ds} + i\,d\theta.$$

Donc le rayon de courbure est

$$\mathrm{MR} = i\,\frac{ds}{d\theta}\,e^{i\theta}.$$

Si l'on veut rapporter la courbe à des coordonnées orthogonales, on posera

$$\mathrm{OM} = x + iy,$$

et le rayon de courbure sera généralement déterminé par l'expression

$$\mathrm{MR} = \frac{2\,\mathrm{gr}(d\mathrm{OM})^2 . d\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM} . \mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM} - \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM} . d^2\mathrm{OM}}$$
$$= \frac{(dx^2 + dy^2)(dy - i\,dx)}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}.$$

31. Déterminons la courbe P *parallèle* à la courbe donnée M, c'est-à-dire ayant avec elle toutes ses normales MP communes.

Le point P appartenant à la normale, on aura

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OM} + ip . d\mathrm{OM}.$$

En outre, la tangente en P, qui est déterminée de direction par la relation

$$d\mathrm{OP} = d\mathrm{OM} + ip . d^2\mathrm{OM} + idp . d\mathrm{OM},$$

doit être parallèle à la tangente $d\mathrm{OM}$. En multipliant

par conj $d\mathrm{OM}$, nous aurons

$$pi.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM} + idp.d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}$$

parallèle à $d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}$, c'est-à-dire d'inclinaison nulle, et partant équipollente à sa propre conjuguée

$$-pi.d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM} - idp.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d\mathrm{OM}.$$

On en conclut

$$-\frac{2dp}{p} = \frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} + \mathrm{conj}\,\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}},$$

et, en intégrant,

$$p = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}}.$$

Donc la distance entre les deux courbes est

$$\mathrm{MP} = \mathrm{C}i.\sqrt{\frac{d\mathrm{OM}}{\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}},$$

et, par suite, elle est de grandeur constante, et les courbes sont vraiment parallèles.

Supposons plus généralement que MP forme avec la tangente un angle constant α, et que la tangente en P doive être encore parallèle à la tangente en M. Prenons l'équipollence

$$d\mathrm{OM} = e^{i\theta}ds.$$

On aura

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OM} + pe^{i(\alpha+\theta)}ds;$$

et le parallélisme de

$$d\mathrm{OP} = e^{i\theta}ds + pe^{i(\alpha+\theta)}(d^2s + i\,ds\,d\theta) + e^{i(\alpha+\theta)}dp\,ds$$

et de

$$d\mathrm{OM} = e^{i\theta}ds$$

donnera

$$\begin{aligned} &pe^{i\alpha}(d^2s + i\,ds\,d\theta) + e^{i\alpha}dp\,ds \\ &\quad = pe^{-i\alpha}(d^2s - i\,ds\,d\theta) + e^{-i\alpha}dp\,ds, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$p\,ds = \mathrm{C}a^{-\theta},$$

C étant une constante, et $a = e^{\cot\alpha}$. Par conséquent,

$$\mathrm{MP} = \mathrm{C}a^{-\theta}e^{i(\alpha+\theta)}.$$

Donc toutes les droites MP qui sont coupées sous un angle égal et constant par les deux courbes M et P, sont respectivement équipollentes aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique.

32. Déterminer la direction de la droite MP, qui, partant du point M d'une courbe, coupe en deux parties égales la corde infiniment petite parallèle à la tangente en M.

Ce problème est le dernier de la *Géométrie de position* (p. 477 et suiv.). Il a été résolu par M. Bellavitis, dans son Mémoire intitulé *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica*, Padoue, 1835, avant la publication des solutions de MM. Transon (1841) et Dupin (1848).

Soient N, L les deux points de la courbe correspondants à $t + \omega$ et à $t - \varpi$. On aura

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OM} + \omega\,.\,\mathrm{D}_t\mathrm{OM} + \frac{\omega^2}{2}\cdot\mathrm{D}_t^2\mathrm{OM} + \ldots,$$

$$\mathrm{LN} = (\omega + \varpi)\,.\,\mathrm{D}_t\mathrm{OM} + \frac{\omega^2 - \varpi^2}{2}\cdot\mathrm{D}_t^2\mathrm{OM}$$
$$+ \frac{\omega^3 + \varpi^3}{6}\cdot\mathrm{D}_t^3\mathrm{OM} + \ldots;$$

et, pour que cette corde soit parallèle à la tangente $\mathrm{D}_t\mathrm{OM}$, il faudra qu'il en soit de même de la droite

$$3(\omega - \varpi)\,\mathrm{D}_t^2\mathrm{OM} + (\omega^2 - \omega\varpi + \varpi^2)\,\mathrm{D}_t^3\mathrm{OM} + \ldots,$$

qui, multipliée par la quantité réelle $\frac{1}{6}(\omega + \varpi)$, et ajoutée géométriquement à la droite $(\omega + \varpi)\mathrm{D}_t\mathrm{OM}$,

donne la droite LN. Les accroissements ω, ϖ devant être infiniment petits, il faudra que $\omega - \varpi$ soit infiniment petit du second ordre, comme l'est $\omega^2 - \omega\varpi + \varpi^2$, qui se réduit à ω^2. En posant

$$\omega - \varpi = q\omega^2,$$

il faudra déterminer la quantité réelle q, de manière que l'on ait

$$3q.D_t^2OM + D_t^3OM = r.D_tOM,$$

r étant pareillement réel; après quoi la direction de la droite qui va de M au milieu de LN sera donnée par la relation

$$MN + ML = (\omega - \varpi).D_tOM + \frac{1}{2}(\omega^2 + \varpi^2).D_tOM,$$

ou par celle-ci

$$MW = q.D_tOM + D_t^2OM.$$

Prenons pour exemple la développante du cercle,

$$OM = \int e^{i\theta}\theta d\theta.$$

En supposant $d^2\theta = 0$, il faudra rendre réelle l'expression

$$3q(1 + \theta i) + (2i + \theta),$$

ce qui donnera $q = -\frac{2}{3\theta}$, et, par suite,

$$MW = \left(\frac{1}{3} + \theta i\right)e^{\theta i}.$$

Donc, si l'on prolonge le rayon de courbure SR de la développée MR, de $RW = \frac{1}{3}$ OR, la droite MW passera par le milieu de la corde de la courbe M, qui est parallèle à la tangente en M et infiniment voisine de cette tangente :

théorème qui est vrai pour une courbe quelconque, et qui donne avec une grande facilité le rayon de courbure des développées des sections coniques, puisque dans ces courbes MW est le diamètre qui passe par M.

33. Déterminer la trajectoire obliquangle des ellipses concentriques et confocales, c'est-à-dire trouver la courbe M, dont la tangente ait une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des deux rayons vecteurs FM, F_1M, plus un angle constant.

Cette condition

$$\text{incl}\, d\text{OM} = \frac{1}{2}(\text{incl FM} + \text{incl F}_1\text{M}) + \alpha$$

est exprimée par la relation

$$d\text{OM} = pe^{i\alpha}\sqrt{\text{FM}.\text{F}_1\text{M}}.$$

Le mode de variation de la variable t, dont dépend OM, étant arbitraire, on peut donner à p une valeur réelle quelconque, propre à simplifier les formules. Posons

$$p = \frac{dt}{\sin\alpha}, \quad \text{FF}_1 = 4, \quad \text{FC} = 2.$$

L'équipollence

$$d\text{FM} = (\cot\alpha + i)\sqrt{(\text{CM} + 2)(\text{CM} - 2)}\,.\,dt,$$

intégrée par les règles connues, en se rappelant que $d\text{FM} = d\text{CM}$, donne

$$\text{CM} = ce^{t(\cot\alpha + i)} + \frac{1}{c}e^{-t(\cot\alpha + i)},$$

ou, en posant $e^{\cot\alpha} = a$,

$$\text{CM} = ca^t e^{it} + \frac{1}{ca^t e^{it}}.$$

On peut facilement établir le mode de génération de la trajectoire M au moyen de deux spirales logarithmiques, trouver le rayon de courbure de cette trajectoire, etc.

34. Terminons par deux problèmes faciles de Mécanique.

I. Un corps pesant est soumis à l'action de la gravité gi; par suite, sa vitesse sera donnée par la relation

$$\frac{d\mathrm{OM}}{dt} = git + c,$$

c étant la vitesse horizontale. Sa trajectoire sera déterminée par la relation

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2} git^2 + ct + a,$$

et, en choisissant convenablement la constante a, nous aurons

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2} gi \left(t - \frac{ci}{g}\right)^2.$$

La vitesse du corps au point M de sa trajectoire est équipollente à $\sqrt{2gi.\mathrm{OM}}$; donc la direction de la vitesse partage en deux parties égales l'angle compris entre la verticale et le rayon vecteur, et cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la distance du corps au foyer O de la parabole.

II. *Trouver le centre de gravité de l'arc de cercle* AMB.

Prenons pour origine des inclinaisons le rayon $\mathrm{OA} = 1$. On aura

$$\mathrm{OM} = e^{it},$$

et, en intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \beta$, nous aurons

$$\int_0^\beta \mathrm{OM}.dt = -i(e^{i\beta} - 1) = -i.\mathrm{AB},$$

expression qui, divisée par la longueur β de l'arc, fait voir que la distance du centre de gravité au centre O est une quatrième proportionnelle à l'arc AMB, à la corde AB et au rayon OA.

35. Nous terminerons ici cet aperçu bien incomplet de la belle et féconde méthode créée par M. Bellavitis, qui permet de traiter par un procédé uniforme tous les problèmes de Géométrie et de Mécanique, depuis les premiers éléments jusqu'aux parties les plus élevées.

Les avantages que cette méthode présente pour les recherches géométriques dans le plan sont de tout point comparables à ceux que, sous le nom de théorie des quantités *imaginaires* ou *complexes*, elle offre à l'Analyse abstraite, à laquelle elle a fait faire de si grands pas. Elle se distingue des autres méthodes de Géométrie analytique, en ce qu'elle pose directement des relations entre les points du plan, indépendamment de tout système particulier de coordonnées, et le calcul même fait apercevoir comment on doit choisir ce système pour arriver à la solution le plus simplement possible.

Naturellement cette méthode, comme toutes les autres, demande un certain exercice pour pouvoir être maniée avec facilité. Mais en y consacrant le même temps qu'à l'étude des méthodes ordinaires, on reconnaîtrait sans peine qu'elle surpasse celles-ci en généralité comme en simplicité. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur la *Rivista di Giornali* que M. Bellavitis publie chaque année dans les *Atti del R. Istituto Veneto*, et dans laquelle il donne des solutions si élégantes des problèmes traités ailleurs par les anciennes méthodes. Nous nous proposons de communiquer plus tard aux *Nouvelles Annales* quelques-unes de ces solutions, relatives à des questions résolues dans ce Journal.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII; 1869.)

ENVOI FRANCO, PAR LA POSTE, EN FRANCE.

CHASLES, Membre de l'Institut. — **Traité des Sections coniques**, faisant suite au **Traité de Géométrie supérieure**. *Première Partie*. In-8 avec 5 planches gravées sur cuivre et contenant 134 figures; 1865.... 9 fr.
La deuxième Partie, qui est sous presse, se vendra de même séparément.

CHASLES, Membre de l'Institut. — **Les trois livres de Porismes d'Euclide**, rétablis pour la première fois, d'après la Notice et les Lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions. In-8, avec 259 figures; 1860..... 10 fr.

CHEVILLARD (A.), Professeur de Perspective à l'École impériale des Beaux-Arts. — **Leçons nouvelles de Perspective**. In-8, avec Atlas de 32 planches in-4, gravées sur acier; 1868..... 12 fr.

HOÜEL (J.), Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Tables de Logarithmes à CINQ DÉCIMALES pour les Nombres et les Lignes trigonométriques**, suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles. 2e édition, revue et augmentée. In-8; 1867. (*L'introduction de cet Ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes en date du 22 août 1859.*)..... 2 fr.

HOÜEL (J.), Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Recueil de Formules et de Tables numériques**. 2e édition, revue et corrigée; grand in-8; 1868..... 4 fr. 50 c.

HOÜEL (J.), Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Théorie élémentaire des quantités complexes.**

Première Partie : **Algèbre des quantités complexes**. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1867..... 2 fr. 50 c.
Deuxième Partie : **Théorie des fonctions uniformes**. Grand in-8; 1869..... 4 fr.

HOÜEL (J.), Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Tables arithmétiques** pour servir d'Appendice à l'*Introduction à la Théorie des nombres*. In-8 grand raisin; 1866. 1 fr. 50 c.

HOÜEL (J), Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire** ou **Commentaire sur les 32 premières propositions des Éléments d'Euclide**. In-8, avec figures dans le texte; 1867..... 2 fr. 50 c.

HOUSEL, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de Mathématiques. — **Introduction à la Géométrie supérieure**. In-8, avec 8 planches; 1865..... 6 fr.

Les théories de l'ancienne Géométrie, telles que les expose le Traité de Legendre sont devenues insuffisantes pour résoudre une foule de questions que les élèves sont appelés à traiter. Le but de ce nouvel Ouvrage est d'exposer les

méthodes modernes avec tous les développements nécessaires. Pour cela, l'Auteur n'a pu mieux faire que de prendre pour base de son travail le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles, en cherchant à vulgariser cet Ouvrage si important pour la science, mais qui n'a pas été écrit en vue des examens et des concours.

PONCELET, Membre de l'Institut. — **Applications d'Analyse et de Géométrie** qui ont servi de principal fondement au **Traité des Propriétés projectives des figures**, avec additions par MM. *Mannheim* et *Moutard*, anciens Élèves de l'École Polytechnique. 2 volumes in-8 avec figures dans le texte, imprimés sur carré fin satiné; 1864..... 20 fr.

Chaque volume se vend séparément..... 10 fr.

PONCELET, Membre de l'Institut. — **Traité des Propriétés projectives des figures.** Ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la Géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain. 2e édition, 1865-1866; 2 beaux volumes in-4 d'environ 450 pages chacun, imprimés sur carré fin satiné, avec de nombreuses planches gravées sur cuivre..... 40 fr.

Le tome II se vend séparément..... 20 fr.

SCHRÖN (L.), Directeur de l'Observatoire et Professeur à Iéna. — **Tables de Logarithmes à sept décimales** pour les nombres depuis **1** jusqu'à **108 000**, et pour les fonctions trigonométriques de dix secondes en dix secondes, précédées d'une **Introduction** par *J. Hoüel*, Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. 9e édition stéréotype, revue et corrigée; un beau volume grand in-8 jésus; 1869. 7 fr.

SCHRÖN (L.). — **Table d'interpolation pour le calcul des parties proportionnelles**, faisant suite aux Tables de Logarithmes à sept décimales, précédée d'une **Introduction** par *J. Hoüel*, Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. 6e édition stéréotype, revue et corrigée; grand in-8 jésus; 1866..... 3 fr.

SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut. — **Éléments d'Arithmétique**, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles spéciales, rédigés conformément au *Programme de l'enseignement scientifique des Lycée*. 5e éd., revue et augmentée. In-8; 1868. (*L'introduction de cet Ouvrage dans les Écoles publiques est autorisés par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes en date du 22 août* 1859.)... 4 fr.

SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut, Professeur au Collége de France. — **Traité de Trigonométrie.** In-8, avec figures dans le texte; 4e *édition*, revue et augmentée; 1868. (*L'introduction de cet Ouvrage dans les Ecoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes en date du 5 août* 1862.)..... 4 fr.

SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut, Professeur au Collége de France et à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Algèbre supérieure.** 3e édition; 2 forts volumes in-8; 1866..... 24 fr.

VALLÉS (F.), Inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées. — **Des formes imaginaires en Algèbre; leur interprétation en abstrait et en concret.** In-8; 1869..... 5 fr.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.33H81S C001
SUR LE CALCUL DES EQUIPOLLENCES PARIS
3 0112 017047009